

FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

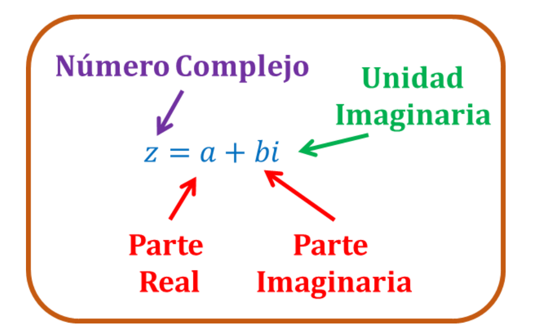
Obs. N° 1: Breve introducción al conjunto de los números reales.

- ✓ N: Naturales
- ✓ Z: Enteros
- ✓ Q: Racionales
- ✓ I: Irracionales
- ✓ R: Reales, $R = Q \cup I$

Obs. N° 2: Campo de los números complejos, definición.

Notación: $\boldsymbol{C}$

Definición: Un número complejo se escribe de la forma siguiente:



Donde:

- ✓ $a \in R$, se define como la parte real.
- ✓ $b \in R$, se define como la parte imaginaria.
- ✓ i, es la unidad imaginaria y tiene como valor $i = \sqrt{-1}$.

Sea $z_1 = a + bi$ un número complejo cualquiera.

- ✓ Si $a = 0$, $z_1 = 0 + bi = bi$, se denomina complejo puro.
- ✓ Si $b = 0$, $z_1 = a + 0i = a$, se denomina real puro.

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer

Número Complejo
Unidad Imaginaria
$z = a + bi$
Parte Real
Parte Imaginaria

Obs. N° 3: Potencias de la unidad imaginaria

- ✓ $i = \sqrt{-1}$
- ✓ $i^2 = -1$
- ✓ $i^3 = -i$
- ✓ $i^4 = 1$
- ✓ $i^5 = \sqrt{-1}$
- ✓ $i^6 = -1$
- ✓ $i^7 = -i$
- ✓ $i^8 = 1$

Obs. N° 4: Igualdad de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. z_1 y z_2 son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Obs. N° 5: Operaciones en el conjunto de los números complejos.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera.

- ✓ **SUMA**

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- ✓ **RESTA**

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- ✓ **MULTIPLICACIÓN**

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Nota:

Sea $z = a + bi$ un número complejo cualquiera. Se define $\bar{z}$ como el conjugado de z.

$z = a + bi$ y su conjugado es $\bar{z} = a - bi$

Se satisface:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi\ ) \cdot (a - bi\ ) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

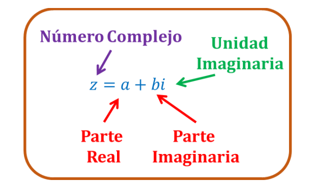
- ✓ **DIVISIÓN**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i = p + qi$$

Donde:

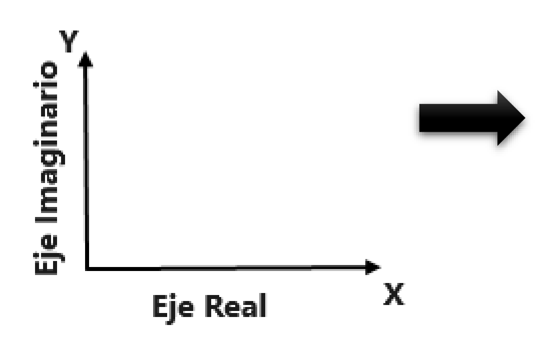
- c y d $deben$ ser $distintos$ de $cero$ $simultáneamente.$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer



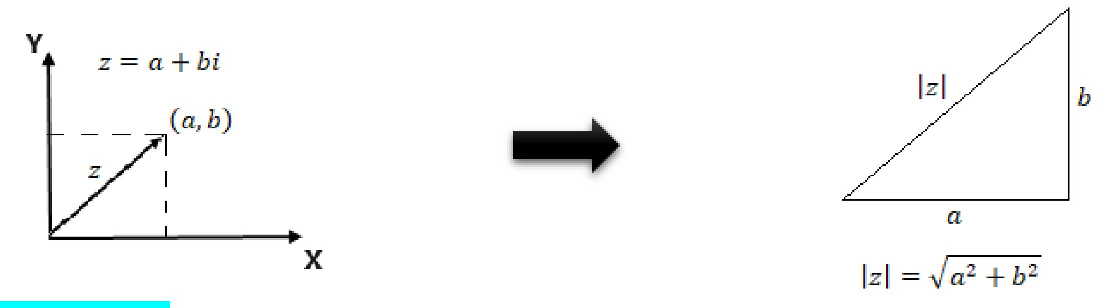
Obs. N° 6: Representación gráfica de un complejo

Plano Complejo



Representación gráfica del complejo $z = a + bi$

Representación Binómica



Obs. N° 7: Propiedades

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Desigualdad Triangular
4. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Obs, N° 8: Equivalencias

Si definimos a un complejo $z = a + bi$ como un par ordenado (a, b), las siguientes operaciones resultan equivalentes:

Igualdad $(a, b) = (c, d) \quad si\ y\ sólo\ si \quad a = c\ \ y\ \ b = d$

Suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación $\begin{cases} (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\ \quad\quad k \cdot (a, b) = (ka, kb) \end{cases}$

Número Complejo
Unidad Imaginaria
$z = a + bi$
Parte Real
Parte Imaginaria

Obs. N° 9: Propiedades del conjugado.

- ✓ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- ✓ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- ✓ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓ $z \cdot \bar{z} = (a + bi\ \ ) \cdot (a - bi\ \ ) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
- ✓ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \ \rightarrow\ a = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$\boldsymbol{Re(z), se\ lee\ parte\ real\ de\ z}$$

- ✓ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi \ \rightarrow\ b = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

$$\boldsymbol{Im(z), se\ lee\ parte\ imaginaria\ de\ z}$$

Obs. N° 10: Axiomas

Sean $z_1, z_2\ \ y\ \ z_3$ tres números complejos cualesquiera.

El campo de los números reales es un GRUPO y se satisfacen en dicho campo los siguientes axiomas

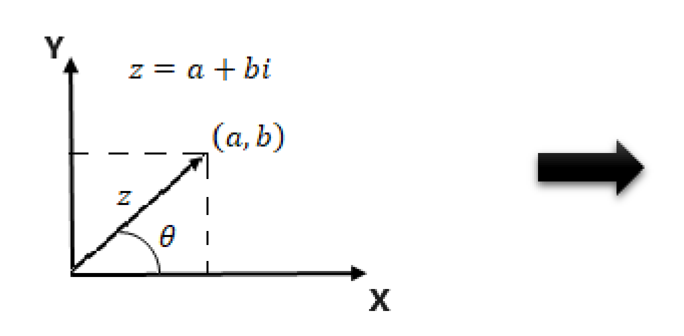
- ✓ **CERRADURA**
  - $(z_1 + z_2) \in C$
  - $(z_1 \cdot z_2) \in C$
- ✓ **CONMUTATIVA**
  - $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- ✓ **ASOCIATIVA**
  - $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
  - $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- ✓ **DISTRIBUTIVA**
  - $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- ✓ **IDENTIDAD O NEUTRO**
  - $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$
  - $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$
- ✓ **OPUESTO O SIMÉTRICO**
  - $z + (-z) = 0$

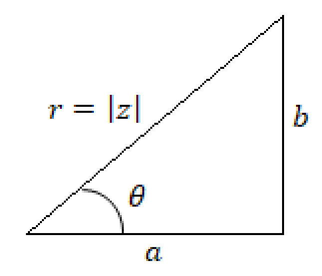
    $-z$ es el opuesto de z con respecto a la suma.

  - $z_1 \cdot z = z \cdot z_1 = 1$
    z_1 es l opuesto o simétrico de z con respecto a la multiplicación.

Nota: el opuesto o simétrico con respecto a la suma o con respecto a la multiplicación es único para cada valor z.

Obs. N° 11: Representación polar de un complejo





$sen\theta = \frac{b}{r}$ $\qquad$ $cos\theta = \frac{a}{r}$

$b = rsen\theta$ $\qquad$ $a = rcos\theta$

De la representación gráfica, se puede concluir:

$$z = a + bi = (a, b) = (rcos\theta, rsen\theta) = r(cos\theta, sen\theta) = r(cos\theta + isen\theta) = rcis\theta$$

$$tan\theta = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \theta = arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad a \neq 0$$

Nota:

1. $\boldsymbol{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$
2. **$\boldsymbol{\theta}$ se define como el argumento de z, es decir $\boldsymbol{arg}(z)$**
3. **Los siguientes intervalos se pueden tomar como el argumento principal de z, es decir $\boldsymbol{Arg}(z)$.**

$$\boldsymbol{0 \leq \theta < 2\pi \qquad o \qquad -\pi < \theta \leq \pi}$$

4. **Casos particulares:**

   a. **Si $\boldsymbol{a = 0}$, se tiene:** $\begin{cases} \boldsymbol{b > 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}} \\ \boldsymbol{b < 0, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}} \end{cases}$

   b. **Si $\boldsymbol{b = 0}$, se tiene:** $\begin{cases} \boldsymbol{a > 0, \quad \theta = 0} \\ \boldsymbol{a < 0, \quad \theta = \pi} \end{cases}$

Obs. N° 12: Seno, coseno y tangente de ángulos notables

$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$sen\theta$	0	1	2	3	4
$cos\theta$	4	3	2	1	0

(Los valores de la tabla van bajo el signo radical $\sqrt{}$ y divididos entre 2)

2

¿Cómo obtener el valor de un ángulo dentro del intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ y su ángulo de referencia θ_o?

Ilustrar varios ejemplos

Caso N° 1: $\boldsymbol{\alpha \geq 2\pi}$

$$\boldsymbol{\theta = \alpha - n \cdot (2\pi)}$$

Caso N° 2: $\boldsymbol{\alpha < 0}$

$$\boldsymbol{\theta = \alpha + (n+1) \cdot (2\pi)}$$

Nota:

1. **El número 2π representa una vuelta en el círculo trigonométrico.**
2. **n representa la cantidad o número de vueltas en el círculo trigonométrico.**
3. **El número n se obtiene de la parte entera que resulta al efectuar la división $\frac{\alpha}{2\pi}$.**

- ✓ $\alpha = \frac{61\pi}{4}$ → $\theta = \frac{61\pi}{4} - 7(2\pi) = \frac{5\pi}{4} \in III$ $\theta_o = \frac{\pi}{4}$
- ✓ $\alpha = \frac{101\pi}{6}$ → $\theta = \frac{101\pi}{6} - 8(2\pi) = \frac{5\pi}{6} \in II$ $\theta_o = \frac{\pi}{6}$
- ✓ $\alpha = \frac{95\pi}{3}$ → $\theta = \frac{95\pi}{3} - 15(2\pi) = \frac{5\pi}{3} \in IV$ $\theta_o = \frac{\pi}{3}$
- ✓ $\alpha = \frac{37\pi}{6}$ → $\theta = \frac{37\pi}{6} - 3(2\pi) = \frac{\pi}{6} \in I$ $\theta_o = \frac{\pi}{6}$
- ✓ $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ → $\theta = -\frac{\pi}{6} + 1(2\pi) = \frac{11\pi}{6} \in IV$ $\theta_o = \frac{\pi}{6}$
- ✓ $\alpha = -\frac{115\pi}{4}$ → $\theta = -\frac{115\pi}{4} + 15(2\pi) = \frac{5\pi}{4} \in III$ $\theta_o = \frac{\pi}{4}$
- ✓ $\alpha = -\frac{34\pi}{3}$ → $\theta = -\frac{34\pi}{3} + 6(2\pi) = \frac{2\pi}{3} \in II$ $\theta_o = \frac{\pi}{3}$
- ✓ $\alpha = -\frac{87\pi}{4}$ → $\theta = -\frac{87\pi}{4} + 11(2\pi) = \frac{\pi}{4} \in I$ $\theta_o = \frac{\pi}{4}$



Obs. N° 13: Multiplicación y división en la forma polar.

Sean $z_1 = a + bi = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = c + di = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ dos números complejos cualesquiera.

- ✓ $z_1 \cdot z_2 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2) = r_1r_2(cos\theta_1cos\theta_2 + icos\theta_1sen\theta_2 + isen\theta_1cos\theta_2 + i^2sen\theta_1sen\theta_2)$

$$= r_1r_2(cos\theta_1cos\theta_2 + (cos\theta_1sen\theta_2 + sen\theta_1cos\theta_2)i - sen\theta_1sen\theta_2)$$
$$= r_1r_2(cos\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2 + (cos\theta_1sen\theta_2 + sen\theta_1cos\theta_2)i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\big(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\big)$$

- ✓ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{cos\theta_1 + isen\theta_1}{cos\theta_2 + isen\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{cos\theta_1 + isen\theta_1}{cos\theta_2 + isen\theta_2} \cdot \frac{cos\theta_2 - isen\theta_2}{cos\theta_2 - isen\theta_2}$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{cos^2\theta_2 - (isen\theta_2)^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\theta_1cos\theta_2 - icos\theta_1sen\theta_1 + isen\theta_1cos\theta_2 - i^2sen\theta_1sen\theta_2)}{cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(cos\theta_1cos\theta_2 + sen\theta_1sen\theta_2 + i(sen\theta_1cos\theta_2 - cos\theta_1sen\theta_1)\big)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\big)$$

Obs. N° 14: Teorema de De Moivre.

Una generalización de la multiplicación en forma polar seria:

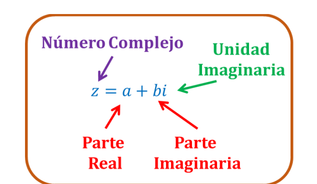
$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1r_2 \cdot \ldots \cdot r_n\big(cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\big)$$

Luego, si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$, se obtiene:

$$(z_1)^n = (r_1)^n\big(cos(\theta_1) + isen(\theta_1)\big)^n$$
$$(z_1)^n = (r_1)^n\big(cos(n\theta_1) + isen(n\theta_1)\big)$$

La expresión anterior es conocida como el **Teorema de De Moivre**.

Nota: El teorema de De Moivre tiene utilidad para demostrar identidades trigonométricas y para obtener raíces de números complejos.



Obs. N° 15: Representación de un número complejo en forma exponencial.

A partir de la serie de Maclaurin, se tiene:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \qquad (1)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \qquad (2)$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (3)$$

Vamos a sustituir x por θ en las expresiones (2) y (3).

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \qquad (4)$$

$$sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad (5)$$

Multiplicamos por i la expresión (5)

$$isen\theta = i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$isen\theta = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots \qquad (6)$$

Sumamos las expresiones (4) y (6)

$$cos\theta + isen\theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots\right)$$

Vamos a ordenar usando propiedades

$$cos\theta + isen\theta = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$cos\theta + isen\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \qquad (7)$$

En la expresión (1) vamos a sustituir x por $i\theta$.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \qquad (9)$$

Observamos que la expresión (7) y la expresión (9) son iguales.

Logramos concluir que:

$$cos\theta + isen\theta = e^{i\theta}$$

Finalmente obtenemos la forma exponencial:

$$z = a + bi = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

Nota:

- ✓ **Para regiones es útil la forma Binómica.**
- ✓ **Para las potencias es útil la forma polar y la forma Binómica.**
- ✓ **Para raíces de números complejos es útil la forma polar y la forma exponencial.**

Obs. N° 16: Multiplicación, división y potencias en la forma exponencial.

Sean z_1 y z_2 dos números complejos cuales quiera dados en su forma exponencial.

- ✓ Multiplicación
  - $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- ✓ División
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- ✓ Potencias
  - $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

Obs. N° 17: Raíces de números complejos.

Sea z_o número complejo cualquiera, expresado en su forma Binómica y exponencial, tal como se muestra a continuación:

Forma Binómica	Forma Exponencial
$\boldsymbol{z_o = a_o + b_o i}$	$z_o = r_o e^{i(\theta_o + 2k\pi)}$

Nota:

1. $\boldsymbol{z_o}$ **es un número complejo conocido, por tanto, se conoce** $\boldsymbol{r_o}$ **y** $\boldsymbol{\theta_o}$**.**
2. $\boldsymbol{\theta_o}$ **es un valor que expresaremos en el siguiente intervalo** $\boldsymbol{0 \leq \theta_o < 2\pi}$**.**
3. **Se desea obtener los números complejos** $\boldsymbol{z = a + bi = re^{i\theta}}$ **que satisfacen a la expresión** $\boldsymbol{z = \sqrt[n]{z_o}}$ **o** $\boldsymbol{z^n = z_o}$**. Estos números complejos se conocen como las raíces de** $\boldsymbol{z^n = z_o}$**.**

Proceso:

1. A partir de la expresión $z^n = z_o$, sustituimos z y z_o en su forma exponencial.

$$z^n = z_o$$
$$\left(\boldsymbol{re^{i\theta}}\right)^{\boldsymbol{n}} = r_o e^{i(\theta_o + 2k\pi)}$$
$$\boldsymbol{r^n e^{in\theta}} = r_o e^{i(\theta_o + 2k\pi)}$$

Luego, se tiene:

$$\begin{cases} r^n = r_o \\ n\theta = \theta_o + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_o} \\ \theta = \frac{\theta_o + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{cases}$$

2. Se escriben todas las raíces:

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{r_o} e^{i\left(\frac{\theta_o + 2k\pi}{n}\right)}$$



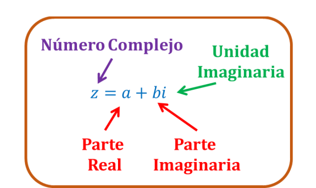
FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

GUÍA DE PROBLEMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Realizar las siguientes operaciones indicadas.

a.	$(3+2i)+(-7-i)$	b.	$(-7-i)+(3+2i)$
c.	$(8-6i)-(3+2i)$	d.	$(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\}$
e.	$\{(5+3i)+(-1+2i)\}+(7-5i)$	f.	$(2-3i)(4+2i)$
g.	$(4+2i)(2-3i)$	h.	$(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\}$
i.	$\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i)$	j.	$(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\}$
k.	$\frac{3-2i}{-1+i}$	l.	$\frac{5+5i}{3-4i}$
m.	$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$	n.	$\frac{2+3i}{1+i}$
o.	$(2-i)+(3+i)$	p.	$(1-i)-(1+4i)$
q.	$(2-i)(1+i)i$	r.	$\frac{2+4i}{1-i}$
s.	$\frac{-4+2i}{1-i}+1-3i$	t.	$\left(\frac{2}{1-2i}\right)\left(\frac{5}{1-i}\right)$
u.	$\left(\sqrt{3}-i\right)-i(2-i)(2+3i)$	v.	$\frac{10-5i}{3-4i}+\frac{10-5i}{5i}$
w.	$\frac{10}{(2-i)(1+i)i}$	x.	$\frac{2+2i}{1-i}-\frac{10}{2-i}$
y.	$\frac{10}{(1+i)(1-i)(2+i)}$	z.	$(2+i)^4$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer





FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

2. Suponga que $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 3 - 2i,\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ \ y\ \ z_4 = 1 + i.$ Evaluar las siguientes expresiones.

a. $\lvert 3z_1 - 4z_2 \rvert$	b. $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$
c. $(\overline{z_3})^4$	d. $\left\lvert \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right\rvert^2$
e. $z_4 + 2\overline{z_1}$	f. $z_4 + \overline{z_4}$
g. $z_4 - \overline{z_4}$	h. $\frac{z_1}{z_4}$
i. $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_4}}$	j. $\overline{\left(\frac{z_2}{z_4}\right)}$

3. Encuentre números reales x y y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

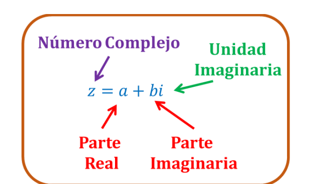
4. Calcular el módulo de los siguientes números complejos.

a. $z = 1 + i$	b. $z = 3 - 4i$
c. $z = 3 + 4i$	d. $z = -3 - 4i$
e. $z = -2i$	f. $z = 3 + i$
g. $z = 3$	h. $z = -4i$
i. $z = 1 - 4i$	j. $z = -2 + 2i$

5. Demostrar.

a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	b. $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer



6. A partir de los siguientes números complejos, obtener $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\theta}$ (asumir $0 \leq \theta < 2\pi$).

a. $\boldsymbol{z = 2 - 2i}$	b. $\boldsymbol{z = 4 + 4i}$
c. $\boldsymbol{z = -3 + 3i}$	d. $z = -1 - i$
e. $\boldsymbol{z = -\sqrt{3} - i}$	f. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$
g. $\boldsymbol{z = 7}$	h. $z = -7$
i. $\boldsymbol{z = -2i}$	j. $z = 2i$

7. Obtener las raíces de cada una de las siguientes expresiones (asumir $0 \leq \theta_o < 2\pi$).

a. $z^3 = 1 + i$	b. $z^4 = 3i$
c. $z^5 = -32$	d. $z = (-1 + i)^{\frac{1}{3}}$
e. $z = \left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{4}}$	f. $z^3 = -8$
g. $z = \sqrt[5]{\frac{1+3i}{1+i} + \frac{(-2i)^{19}\left(e^{i\pi}\right)^{14}}{8\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^{16}}}$	h. $z^3 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
i. $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$	j. $z^4 - z^3 + 2z - 2 = 0$
k. $z = \sqrt[5]{2 + 2i}$	l. $z^3 = 1 - i$

FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

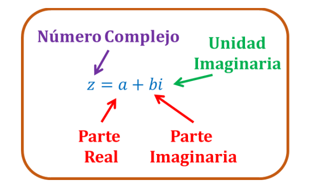
GUÍA DE PROBLEMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

RESPUESTA

1. Realizar las siguientes operaciones indicadas.

a.	$(\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})+(-\mathbf{7}-\boldsymbol{i})=-\mathbf{4}+\boldsymbol{i}$	b.	$(-\mathbf{7}-\boldsymbol{i})+(\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})=-\mathbf{4}+\boldsymbol{i}$
c.	$(\mathbf{8}-\mathbf{6}\boldsymbol{i})-(\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})=\mathbf{15}-\mathbf{8}\boldsymbol{i}$	d.	$(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\}=11$
e.	$\{(\mathbf{5}+\mathbf{3}\boldsymbol{i})+(-\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})\}+(\mathbf{7}-\mathbf{5}\boldsymbol{i})=\mathbf{11}$	f.	$(2-3i)(4+2i)=14-8i$
g.	$(\mathbf{4}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})(\mathbf{2}-\mathbf{3}\boldsymbol{i})=\mathbf{14}-\mathbf{8}\boldsymbol{i}$	h.	$(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\}=8+51i$
i.	$\{(\mathbf{2}-\boldsymbol{i})(-\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{i})\}(\mathbf{5}-\mathbf{4}\boldsymbol{i})=\mathbf{8}+\mathbf{51}\boldsymbol{i}$	j.	$(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\}=-2+9i$
k.	$\frac{\mathbf{3}-\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{-\mathbf{1}+\boldsymbol{i}}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$	l.	$\frac{5+5i}{3-4i}=3-i$
m.	$\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{i}^{\mathbf{30}}-\boldsymbol{i}^{\mathbf{19}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}-\mathbf{1}}=\mathbf{1}+\boldsymbol{i}$	n.	$\frac{2+3i}{1+i}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$
o.	$(\mathbf{2}-\boldsymbol{i})+(\mathbf{3}+\boldsymbol{i})=\mathbf{5}$	p.	$(1-i)-(1+4i)=-5i$
q.	$(\mathbf{2}-\boldsymbol{i})(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}=-\mathbf{1}+\mathbf{3}\boldsymbol{i}$	r.	$\frac{2+4i}{1-i}=-1+3i$
s.	$\frac{-\mathbf{4}+\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{i}}+\mathbf{1}-\mathbf{3}\boldsymbol{i}=-\mathbf{2}-\mathbf{4}\boldsymbol{i}$	t.	$\left(\frac{2}{1-2i}\right)\left(\frac{5}{1-i}\right)=-1+3i$
u.	$(\sqrt{\mathbf{3}}-\boldsymbol{i})-\boldsymbol{i}(\mathbf{2}-\boldsymbol{i})(\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{i})=\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{4}-\mathbf{8}\boldsymbol{i}$	v.	$\frac{10-5i}{3-4i}+\frac{10-5i}{5i}=1-i$
w.	$\frac{\mathbf{10}}{(\mathbf{2}-\boldsymbol{i})(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}}=-\mathbf{1}-\mathbf{3}\boldsymbol{i}$	x.	$\frac{2+2i}{1-i}-\frac{10}{2-i}=-4$
y.	$\frac{\mathbf{10}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})}=\mathbf{2}-\boldsymbol{i}$	z.	$(2+i)^4=-7+24i$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer





FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

2. Suponga que $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 3 - 2i \quad y \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Evaluar las siguientes expresiones.

a. $\|3z_1 - 4z_2\| = \sqrt{157}$	b. $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = -7 + 3i$
c. $(\overline{z_3})^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	d. $\left\|\frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right\|^2 = 1$
e. $z_4 + 2\overline{z_1} = 5 - i$	f. $z_4 + \overline{z_4} = 2$
g. $z_4 - \overline{z_4} = 2i$	h. $\frac{z_1}{z_4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$
i. $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$	j. $\overline{\left(\frac{z_2}{z_4}\right)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

3. Encuentre los números reales x y y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$ $\quad$ $x = -1, \quad y = 2$

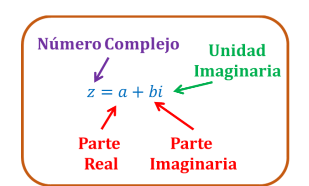
4. Calcular el módulo de los siguientes números complejos.

a. $z = 1 + i$	$\|z\| = \sqrt{2}$	b. $z = 3 - 4i,$	$\|z\| = 5$
c. $z = 3 + 4i$	$\|z\| = 5$	d. $z = -3 - 4i,$	$\|z\| = 5$
e. $z = -2i$	$\|z\| = 2$	f. $z = 3 + i,$	$\|z\| = \sqrt{10}$
g. $z = 3$	$\|z\| = 3$	h. $z = -4i$	$\|z\| = 4$
i. $z = 1 - 4i$	$\|z\| = \sqrt{17}$	j. $z = -2 + 2i$	$\|z\| = \sqrt{8}$

5. Demostrar. Se recomienda expresar los complejos en su forma Binómica, partir de un miembro y usar propiedades hasta llegar espontáneamente al otro miembro de la igualdad.

a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	b. $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

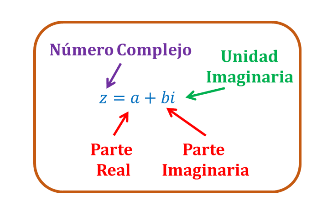
Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer





6. A partir de los siguientes números complejos, obtener $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\theta}$ (asumir $0 \leq \theta < 2\pi$).

Complejo	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\theta}$	Complejo	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\theta}$
a. $z = 2 - 2i$	$\sqrt{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	b. $z = 4 + 4i$	$\sqrt{32}$	$\frac{\pi}{4}$
c. $z = -3 + 3i$	$\sqrt{18}$	$\frac{3\pi}{4}$	d. $z = -1 - i$	$\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
e. $z = -\sqrt{3} - i$	$\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	f. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$	4	$\frac{\pi}{3}$
g. $z = 7$	7	0	h. $z = -7$	7	π
i. $z = -2i$	2	$\frac{3\pi}{2}$	j. $z = 2i$	2	$\frac{\pi}{2}$



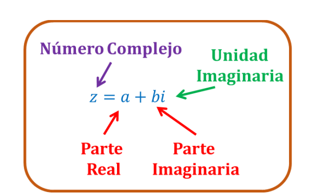


FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

7. Obtener las raíces de cada una de las siguientes expresiones (asumir $0 \leq \theta_o < 2\pi$).

Expresión	Raíces	Expresión	Raíces
a. $\boldsymbol{z^3 = 1 + i}$	$z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$	b. $z^4 = 3i$	$z_1 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{8}}$ $z_2 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{5\pi}{8}}$ $z_3 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{9\pi}{8}}$ $z_4 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{13\pi}{8}}$
c. $\boldsymbol{z^5 = -32}$	$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ $z_3 = 2e^{i\pi}$ $z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{5}}$ $z_5 = 2e^{i\frac{9\pi}{5}}$	d. $z = (-1 + i)^{\frac{1}{3}}$	$z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$
e. $\boldsymbol{z = \left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{4}}}$	$z_1 =$ $z_2 =$ $z_3 =$ $z_4 =$	f. $z^3 = -8$	$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_2 = 2e^{i\pi}$ $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$
g. $\boldsymbol{z = \sqrt[5]{\frac{1+3i}{1+i} + \frac{(-2i)^{19}\left(e^{i\pi}\right)^{14}}{8\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^{16}}}}$	$z_1 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{20}}}$ $z_2 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{20}}}$ $z_3 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{20}}}$ $z_4 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ $z_5 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}e^{i\frac{33\pi}{20}}}$	h. $z^3 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$	$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{19\pi}{36}}}$ $z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{43\pi}{36}}}$ $z_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{67\pi}{36}}}$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer





FACULTAD DE INGENIERÍA
ÁLGEBRA LINEAL

Expresión	Raíces	Expresión	Raíces
i. $\boldsymbol{z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$	$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{19\pi}{36}}$ $z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{43\pi}{36}}$ $z_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{67\pi}{36}}$	j. $z^4 - z^3 + 2z - 2 = 0$	$z_1 = 1$ $z_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_3 = \sqrt[3]{2} e^{i\pi}$ $z_4 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{3}}$
k. $\boldsymbol{z = \sqrt{2 - 2i}}$	$z_1 = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{7\pi}{8}}$ $z_2 = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{15\pi}{8}}$	l. $z^3 = 1 - i$	$z_1 = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $z_2 = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $z_3 = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{23\pi}{12}}$

Elaborado por el Prof. MSc. David Osorio Cróquer

